8/12/2020

Είδαμε χτες ότι οι μερικές παράγωγοι ανώτερης τάξης $k+1$, $k \in \mathbb{N} = \{1, 2, ..\}$ μιας $f: U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοιχτό, ορίζονται ως οι μ.π. (πρώτης τάξης) των μ.π. τάξης k της f (προφανώς αν οι τελευταίες υπάρχουν)

π.χ. (απλούστερη πιο συχνή περίπτωση) Έχουμε: $\frac{\partial f}{\partial x_i}: U \to \mathbb{R}$ $\forall\, i = 1, ..., k$. Τότε (αν υπάρχουν)

ορίζονται οι μ.π. δεύτερης τάξης της f ως

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) =: \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

Παραδ. 3.5.1(β) : $h(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(δηλ. $h: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$)

Προκύπτει ότι $h \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$ [αφού στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ έχουμε καλά ορισμένες ρητές συναρτήσεις των (x,y) και με μερική διαφόριση προκύπτουν πάλι καλά ορισμ. ρητές συναρτήσεις, οι οποίες ως γνωστόν - είναι συνεχείς, όπου ορίζονται]

Επίσης, προκύπτει - μέσω του ορισμού (ορίου) - ότι $\exists\, \frac{\partial h}{\partial x}(0,0) = 0 =$ $= \frac{\partial h}{\partial y}(0,0)$ και ακόμα ότι $\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y} \in C(\mathbb{R}^2) \xRightarrow{h \in C(\mathbb{R}^2)}$ $\Rightarrow h \in C^1(\mathbb{R}^2)$

Για τις μ.π. δεύτερης τάξης στο $(0,0)$ χρησιμοποιούμε πάλι τον ορισμό της μ.π. πρώτης τάξης για τις συναρτήσεις $\Rightarrow$

$\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ και προκύπτει ότι:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(0,0) = 0 = \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(0,0),$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x}(0,0) = \left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)(0,0)\right] = -1$$

$$= \lim_{y \to 0} \frac{\frac{\partial h}{\partial x}(0,y) - \frac{\partial h}{\partial x}(0,0)}{y}$$

αλλά:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}(0,0) = 1$$

Συνεπώς:

$$\exists \; \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

(δεν θέλμε κάτι άλλο για τις συναρτήσεις αυτές)

όμως, δεν ισχύει $\frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} \in C(\mathbb{R}^2) \Rightarrow$ δεν ισχύει $h \in C^2(\mathbb{R}^2)$

(*) Συγκεκριμένα δεν υπάρχουν (στο $\mathbb{R}$) τα όρια:

$$\lim_{\substack{(x,y) \to (0,0) \\ \neq (0,0)}} \frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x}(x,y), \quad \lim_{\substack{(x,y) \to (0,0) \\ \neq (0,0)}} \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}(x,y)$$

Το ότι μια τουλ. από τις $\frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ δεν είναι συνεχής προκύπτει (εδώ) και από την παράσταση ότι $\forall (x,y) \neq (0,0)$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}(x,y)$$

Ενώ -όπως μόλις είπαμε- $\frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x}(0,0) = -1$,

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}(0,0) = 1$$

Βλέπουμε όμως ότι στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, όπου $h \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$ ισχύει ότι οι ~~μερ~~ μεικτές μ.π. $2^{ης}$ τάξης είναι ίσες.

Ισχύει το Θεώρημα Schwarz
Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοιχτό και $f \in C^2(U)$. Τότε ισχύει ότι:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \quad \forall\, i,j = 1,\dots,n.$$

[απλά: αν η συνάρτηση είναι 2 φορές συνεχώς μερικώς διαφ/μη, τότε οι μεικτές μ.π. δεύτερης τάξης είναι ίσες, δηλ. δεν παίζει ρόλο αν θα διαφορίσουμε μερικώς πρώτα ως προς x_i και μετά ως προς x_j ή το αντίστροφο [δεν παίζει ρόλο η σειρά μερικής διαφόρισης] (βλ. προηγ. παρατ.)

Το Θεώρημα Schwarz γενικεύεται και σε παραγώγους ανώτερης τάξης $k \geq 2$.
Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοιχτό και $f \in C^k(U)$, $k \geq 2$. Τότε μια μερική παράγωγος μέχρι και k τάξης, δεν εξαρτάται από τη σειρά με την οποία διαφορίζω μερικώς ως προς κάποιες μεταβ., αλλά φυσικά εξαρτάται από το πόσες φορές διαφορίζω τις μεταβλητές αυτές.

→ Δ

π.χ. $\frac{\partial^3 f}{\partial x_3 \partial x_2 \partial x_1} = \frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3}$ αλλά

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_2 \partial x_2 \partial x_1} = \frac{\partial^3 f}{\partial x_2^2 \partial x_1} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1 \partial x_2}$$

Σημαντικότερη εφαρμογή μερικών παραγώγων 2=ης τάξης :

Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$ και $f \in C^2(U)$. Ο διαφορικός τελεστής $\Delta := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$

[Ιδίως η απεικόνιση (↓): $f \xmapsto{\Delta} \Delta f := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$ με $\Delta : C^2(U) \to C(U)$] ονομάζεται τελεστής του Laplace και η Μερική Διαφορική Εξίσωση (*) $\boxed{\Delta f = 0}$ ονομάζεται Εξίσωση Laplace και οι λύσεις της ονομάζονται αρμονικές συναρτήσεις

(*) η Διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους

(↓) σε χώρους συναρτήσεων

! $\Delta f = 0$: από τις σημαντικότερες Μ.Δ.Ε. ίσως η σημαντικότερη - βασικότερη!

Θεώρημα Taylor (για συναρτήσεις πραγμ. περισσοτέρων πραγμ. ανεξάρτητων μεταβλητών) =
= γενίκευση του Θ. Taylor στον ΑΠΕΙ1 - ΑΠΕΙ2

Ηθικό δίδαγμα: Ένα από τα σημαντικότερα θεωρήματα της (κλασικής) Ανάλυσης και κυρίως των Εφαρμογών της (π.χ. και στη Διαφ. Γεωμ. ή στις Μ.Δ.Ε)

Απαραίτητος Συμβολισμός: Ένα διάνυσμα $a=(a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{N}_0^n$ (όπου $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N}\cup\{0\}$), $n \in \mathbb{N} = \{1,2,3,\dots\}$ η διάσταση του διανύσματος, ονομάζεται πολυδείκτης τάξης $|a| := a_1+\dots+a_n$

π.χ.

$a=(1,2)$, $|a|=3$

με α παραγοντικό $a! := a_1!\dots a_n!$

[όπου υπενθύμιση: $a_i! = a_i\cdot(a_i-1)\cdot\dots\cdot 2\cdot 1$ για $a_i \in \mathbb{N}$ και σύμβαση: $0!=1$]

π.χ.

$a=(1,2) \Rightarrow a! = 1!\cdot 2! = 1\cdot 2 = 2$

Για $\bar{x}\in\mathbb{R}^n$ εισάγουμε επίσης τον συμβολισμό:

$\bar{x}^a = \bar{x}^{(a_1,\dots,a_n)} = (x_1,\dots,x_n)^{(a_1,\dots,a_n)} := x_1^{a_1}\cdot x_2^{a_2}\cdots x_n^{a_n}$

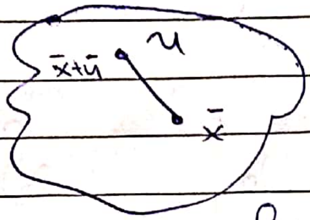
[όπου - φυσικά - $x_i^0 = 1$] και τέλος τον συμβολισμό

$D^a f(\bar{x}) := \dfrac{\partial^{|a|}}{\partial x_1^{a_1}\dots\partial x_n^{a_n}} f(\bar{x})$ για μια $f: U \to \mathbb{R}$,

$U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό αν - φυσικά - η μερική παράγωγος τάξης $|a| = a_1+\dots+a_n$ υπάρχει στο $\bar{x}\in U$.

Θεώρημα Taylor: (Θ. 3.8.1, Σημειώσεις)

Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό, $\bar{x} \in U$ και $\bar{h} \in \mathbb{R}^n$, τέτοιο ώστε: $\{ \bar{x} + t\bar{h} : t \in [0,1] \} \subset U$ [δηλ. το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα σημεία $\bar{x}$ και $\bar{x}+\bar{h}$ να βρίσκεται ολόκληρο μέσα στο U] και έστω $f \in C^{k+1}(U)$, $k \in \mathbb{N}_0$. Τότε υπάρχει ένα $\theta \in [0,1]$ έτσι ώστε να ισχύει ο τύπος του Taylor:



$$f(\bar{x}+\bar{h}) = \underbrace{\sum_{|a| \le k} \frac{D^a f(\bar{x})}{a!} \bar{h}^a}_{T_{k,f,\bar{x}}(\bar{h})} + \sum_{|a|=k+1} \frac{D^a f(\bar{x}+\theta\bar{h})}{a!}$$

άθροισμα πάνω απ' όλα τα $a \in \mathbb{N}_0^n$ με $|a| \le k$

Πόρισμα 3.8.1 (Σημειώσεις)

Έστω $f \in C^k(U)$. Τότε $\forall\ \bar{x} \in U$ ισχύει:

$$f(\bar{x}+\bar{h}) = \sum_{|a| \le k} \frac{D^a f(\bar{x})}{a!} \bar{h}^a + o(\|\bar{h}\|^k) \text{ για } \bar{h} \to \bar{0}$$

πολυώνυμο Taylor βαθμού k της f στο $\bar{x}$

$$= T_{k,f,\bar{x}}(\bar{h})$$

Δηλ.: $\lim_{\bar{h} \to \bar{0}} \frac{f(\bar{x}+\bar{h}) - T_{k,f,\bar{x}}(\bar{h})}{\|\bar{h}\|^k} = 0$

[γενικότερα: $F(\bar{h}) = G(\bar{h}) + o(\|\bar{h}\|^k)$ για $\bar{h} \to \bar{0}$ $:\Leftrightarrow$ $\lim_{\bar{h} \to \bar{0}} \frac{F(\bar{h}) - G(\bar{h})}{\|\bar{h}\|^k} = 0$]

Scanned with CamScanner

Παρατήρηση (1) Το ΘΤ για περισσότερες μεταβλητές προκύπτει με χρήση του Θ.Τ. για 1 μεταβλητή και τον κανόνα της Αλυσίδας

(2) Ένας πολυδείκτης $a=(a_1,\dots,a_n)$ στον συμβολισμό $D^a f(\bar{x}) = \frac{\partial^{|a|}}{\partial x_1^{a_1}\dots\partial x_n^{a_n}} f(\bar{x})$ κωδικοποιεί μόνο πόσες φορές παραγωγίζω μερικώς ως προς κάθε ανεξάρτητη μεταβλητή [δηλ. a_1 φορές ως προς την x_1 κλπ] και όχι με ποια σειρά. Όμως από το Θ. Schwarz γνωρίζουμε ότι για $f \in C^{|a|}(U)$ δεν παίζει ρόλο η σειρά.

Το πολυώνυμο Taylor βαθμού k της f στο $\bar{x}$ μπορεί να γραφεί και ως εξής:

$$T_{k,f,\bar{x}}(\bar{u}) := \sum_{|a|\le k} \frac{D^a f(\bar{x})}{a!}\bar{u}^a = \sum_{m=0}^{k} \underbrace{\sum_{|a|=m} \frac{D^a f(\bar{x})}{a!}\bar{u}^a}_{=:P_m(\bar{u})}$$

καλύτερη γραφή απ' αυτή στις σημειώσεις

$|a| = a_1+\dots+a_n \ge 0$ για $a=(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{N}_0^n$

όπου $\sum_{|a|=m}$ είναι το άθροισμα πάνω από τα $a\in\mathbb{N}_0^n$ (κάθε ένα από μια φορά) που έχουν τάξη m

Για να δούμε για n=2 δηλ. για m=0,1,2 τι προκύπτει?